ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ.

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 30 Σχολικό Βιβλίο

Α2. Ορισμός Σελίδα 22 Σχολίκό Βιβλίο

Α3. α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + \alpha \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 2\alpha x - 12$$

Β2.

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της f στο $x_0 = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(1)$.

Ισχύει ότι

$$\varepsilon\phi \,||\, x'x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Β3.

Για $\alpha = 3$, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad ή \quad x = -2$

Ο.Ε.Φ.Ε.

Έτσι $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$

και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-2,1)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,1]$

Επίσης για $x=-2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή
$f(-2)=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)+10=30$ και

Για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή
$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1+10=3$

Β4.

Για $\alpha=3$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[6(x+2)\right]=6(1+2)=18$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

$$\sum_{i=1}^{4}x_i v_i=10\cdot 20+14\cdot 15+18\cdot v_3+22\cdot 5=200+210+18\cdot v_3+110=520+18\cdot v_3$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i}{v}\Leftrightarrow 14=\frac{520+18v_3}{v}\Leftrightarrow 520+18v_3=14v \quad (1)$$

$$v_1+v_2+v_3+v_4=v\Leftrightarrow 20+15+v_3+5=v\Leftrightarrow v=40+v_3 \quad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$$520+18\cdot v_3=14(40+v_3)\Leftrightarrow 520+18\cdot v_3=560+14\cdot v_3\Leftrightarrow 4v_3=40\Leftrightarrow v_3=10$$

Τότε $(2)\Leftrightarrow v=40+10=50$

Ο.Ε.Φ.Ε.

Γ2.

κλάσεις	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3.

$x_i-\bar{x}$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu$
–4	16	320
0	0	0
4	16	160
8	64	320
Σύνολο		800

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i}{\nu}=\frac{800}{50}=16 \text{ η διακύμανση}$$

Γ4.

Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{16}=4$

$CV=\frac{s}{\left|\bar{x}\right|}=\frac{4}{7}\simeq 0,3=30\%>10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ο.Ε.Φ.Ε.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{0\}$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{(1)'x^2-1\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x<0$ άρα η $f\searrow(-\infty,0)$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ άρα η $f\nearrow(0,+\infty)$

Δ2.

$$-4\le x\le -1\Leftrightarrow f(-4)\ge f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow -\frac{1}{16}\ge f(x)\ge -1\Leftrightarrow -1\le f(x)\le -\frac{1}{16}$$

αφού

$f\searrow(-\infty,0)$ και $x\in[-4,-1]$ και $f(-4)=-\frac{1}{(-4)^2}=-\frac{1}{16}$,

$f(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}=-1$

Δ3.

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{M}(1,f(1))$

$\varepsilon: y=\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\alpha=f'(1)=\frac{2}{1^3}=2$ και $f(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$

Το σημείο επαφής $\mathrm{M}(1,-1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα $-1=2\cdot 1+\beta\Leftrightarrow\beta=-3$

Επομένως $\varepsilon: y=2x-3$

Δ4.

Ισχύει $y_i = 2x_i - 3$ με $i = 1, 2, 3$

$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ και $s_y = 2 \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Επομένως $CV = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{4}{5}$

Ο.Ε.Φ.Ε.