



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

*(Ενδεικτικές Απαντήσεις)*

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού
- A2.** Ορισμός σελίδα 142 σχολικού
- A3.** Ορισμός σελίδα 161 σχολικού
- A4.**
- α. ΣΩΣΤΟ
  - β. ΣΩΣΤΟ
  - γ. ΣΩΣΤΟ
  - δ. ΛΑΘΟΣ
  - ε. ΛΑΘΟΣ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για να ορίζεται η  $f \circ g$  πρέπει

$$\begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ g(x) \in (0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα  $A_{f \circ g} = [0,1]$

Επίσης  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^2} + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Επομένως  $h(x) = (f \circ g)(x) = (x - 1)^2$ ,  $x \in [0,1]$

**B2.** Έστω  $h(x) = y \Leftrightarrow (x - 1)^2 = y \Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

Επίσης πρέπει  $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq -\sqrt{y} + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$

Επομένως  $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

$$H \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

### B3.

I. Για να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών πρέπει η  $\varphi$  να είναι συνεχής στο  $[0,1]$  και  $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η  $\varphi$  στο  $[0,1)$  είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Αφού

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

άρα  $\varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$ , επομένως η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  συνεπώς η  $\varphi$  συνεχής στο  $[0,1]$

Επίσης  $\varphi(0) = 1$  άρα

$$\varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

II. Για  $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xleftrightarrow{\eta \mu \uparrow \text{στο } (0, \frac{\pi}{2})} \eta \mu \alpha < \frac{\pi}{6} < \eta \mu \alpha < \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta \mu \alpha < 1$ ,

Το  $\eta \mu \alpha$  είναι μία ενδιάμεση τιμή μεταξύ των  $\varphi(0)$  και  $\varphi(1)$ , άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει  $x_0 \in (0,1) : \varphi(x_0) = \eta \mu \alpha$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε  $x < -1$  :

$$f'(x) = -2 \xleftrightarrow{\Sigma. \Theta. \text{M. T}} f'(x) = (-2x)'$$

Άρα  $f(x) = -2x + c_1$  για κάθε  $x \leq -1$ .

Για κάθε  $x > -1$  :

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \xleftrightarrow{\Sigma. \Theta. \text{M. T}} f'(x) = (x^3 - x)'$$

Άρα  $f(x) = x^3 - x + c_2$  για κάθε  $x > -1$ .

Αφού η  $C_f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε  $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 + c_1, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $-1$  συνεπώς  $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow c_1 = -2$

**Γ2.** Για  $x_0 > -1$  εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το  $(0, -2)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} -2 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow \\ -2 - x_0^3 + x_0 &= -3x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y = 2x - 2$ .

**Γ3.** Αφού  $M$  είναι σημείο της  $(\varepsilon)$  τότε  $M(x, 2x-2)$

Και  $K$  η προβολή του  $M$  στον  $x'x$  τότε  $K(x, 0)$

Το εμβαδόν του τριγώνου  $MKG$ :  $E = \frac{MK \cdot KG}{2} = \frac{(x-2) \cdot (2x-2)}{2} = x^2 - 3x + 2$

Επομένως  $E(x(t)) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

Άρα  $E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$  και για  $t = t_0$  είναι  $x(t_0) = 3$  και  $x'(t_0) = 2$

Άρα  $E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \frac{\mu\text{ov}^2}{\text{sec}}$

$$\mathbf{\Gamma 4.} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{f(x)} \eta\mu \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right) \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0 \\ u = \frac{1}{f(x)}}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left( u \eta\mu \frac{1}{u} \right) = 0$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3} \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \\ y = -x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 - y}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

## ΘΕΜΑ Δ

### Δ1.

I. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f'$		-	+
$f''$		$\ominus$	
		$\swarrow$	$\searrow$

$$\Delta_1 = (0,1], \quad \Delta_2 = (1, +\infty)$$

$$f(\Delta_1) \stackrel{\text{φθiv.}}{=} \left[ f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$f(\Delta_2) \stackrel{\text{αυξ.}}{=} (f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (1 - \ln 3, +\infty), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = +\infty \text{ επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Αφού  $0 \in f(\Delta_1)$  και  $f$  γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = 0$

Αφού  $0 \in f(\Delta_2)$  και  $f$  γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό  $x_2 \in (1, +\infty)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = 0$

II. Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ .

Άρα η  $f$  είναι κυρτή.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx.$$

Όμως για κάθε  $x \in (x_1, x_2)$  είναι  $f(x) \neq 0$ , η  $f$  είναι συνεχής στο  $(x_1, x_2)$  συνεπώς από την συνέπεια του θεωρήματος Bolzano έχουμε ότι η  $f$  διατηρεί πρόσημο. Επίσης ισχύει  $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$  επομένως  $f(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [x_1, x_2]$

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x) dx = [x \ln 3x - x - \frac{x^2}{2}]_{x_1}^{x_2} =$$

$$x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^2}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^2}{2}$$

Όμως

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$$

Άρα

$$E = x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^2}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

**Δ3.** Έχουμε ότι  $E > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$  διότι η  $f$  δεν είναι σταθερή στο  $[x_1, x_2]$

Επίσης  $x_1 < 1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1$

Άρα έχουμε:

$$2 - x_1 < x_2 \stackrel{\substack{2-x_1, x_2 \in (1, +\infty) \\ f \text{ αύξουσα}}}{\Rightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(2 - x_1) < 0$$

**Δ4.** Αφού η  $f$  είναι κυρτή έχουμε :

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $x = x_2$

Όμως  $2f(x) + \ln 3 - 1 \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$  με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το  $x = 1$  διότι η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο μόνο στο 1.

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.