(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α΄

Α1. Απόδειξη σελ.135 σχολικού.

Α2. Διατύπωση θεωρήματος σελ.51 σχολικού.

Α3. Ορισμός Ισότητας Συναρτήσεων σελ.23 σχολικού

Α4.
Α)ΣΩΣΤΟ
Β)ΛΑΘΟΣ
Γ)ΣΩΣΤΟ
Δ)ΣΩΣΤΟ
Ε)ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β΄

Β1. *Στη δοθείσα σχέση θέτω* $w=x+1 \Leftrightarrow x=w-1$
Οπότε $f(w)=we^{-w+1} \Leftrightarrow f(w)=we^{-w+1}$
Άρα $f(x)=xe^{1-x}$, $x \in R$

Β2. *Η f είναι συνεχής στο R ως γινόμενο της πολυωνυμικής συνάρτησης* $y=x$ *και της σύνθεσης συνεχών* $y=e^{1-x}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$f'(x)=(x)'\, e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} + x\, e^{1-x}\,(1-x)' = e^{1-x} - x\, e^{1-x} = (1-x)\, e^{1-x}$

επειδή $e^{1-x}>0$ *για κάθε* $x \in R$ *το πρόσημο της* $f'(x)$ *καθορίζεται από το 1-x οπότε:*

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)\, e^{1-x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$

x	-∞ +∞	1	1 +∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Ο.Μ

f(1)=1

Άρα στο (-∞, 1] η f γνησίως αύξουσα και στο (1, +∞) η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την f(1)=1 .

Β3.

$f''(x)=[(1-x)\, e^{1-x}]' = (1-x)'\, e^{1-x} + (1-x)\,(e^{1-x})' = -e^{1-x} + (1-x)\, e^{1-x}(-1) = -e^{1-x} - (1-x)\, e^{1-x} = (x-2)\, e^{1-x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\, e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

το πρόσημο της f''(x) καθορίζεται από το πρόσημο του x-2. Έτσι :

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

x	-∞	2	+∞
f	-	0	+

”(x)		
f(x)		

Η f κοίλη στο (-∞,2] και κυρτή στο (2,+∞)

Στο x_0=2 αλλάζουν τα κοίλα, ορίζεται εφαπτομένη οπότε το σημείο (2, f(2))=(2, $\frac{2}{e}$) είναι σημείο καμπής.

<u>Ασύπτωτες</u>

Κατακόρυφη ασύπτωτη η C_f δεν έχει ως συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Πλάγια ή οριζόντια

Επειδή το όριο της εκθετικής συνάρτησης είναι διαφορετικό όταν x->+∞ από όταν x->-∞ έχουμε:

Στο +∞

λ=$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=$
$\lim x\to+\infty xe1-xx$=$\lim x\to+\infty e1-x$=$\lim u\to-\infty eu=0$ (θέτω u=1-x)

β=$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-0\cdot x]=$
$\lim x\to+\infty x\cdot e1-x$=$\lim x\to+\infty xex-1$=$\lim x\to\infty xex-1$=$\lim x\to+\infty 1ex-1=0$ από κανόνα De L’ Hospital.

Αρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

Στο -∞

λ=$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=$
$\lim x\to-\infty xe1-xx$=$\lim x\to-\infty e1-x$=$\lim u\to+\infty eu=+\infty$ (θέτω u=1-x)

Αρα στο -∞ δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

B4. f$((-\infty,1])$=($\lim_{\chi\to-\infty}f(x),f(1)]=(-\infty,1]$ γιατί $\lim_{\chi\to-\infty}f(x)=\lim_{\chi\to-\infty}x\cdot e^{1-x}=-\infty$

f$((1,+\infty))$=($\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x))=(0,1)$ γιατί $\lim_{\chi\to+\infty}f(x)=0$ $\lim_{\chi\to1^+}f(x)=f(1)=1$

Αρα η ένωση των προηγούμενων 2 διαστημάτων δίνει το σύνολο τιμών $(-\infty, 1]$.
ιι) Δια κρίνουμε τις περιπτώσεις:
Αν λ>1 η f(x)=λ είναι αδύνατη.
Αν λ=1 η f(x)=1 έχει μοναδική ρίζα την x=1
Αν 0<λ<1 η f(x)=λ έχει 2 ακριβώς ρίζες μια στο (-∞,1) και μια στο (1,+∞) ως γνησία μονότονη σε καθένα από αυτά.
Αν $\lambda \leq 0$ τότε έχει μοναδική ρίζα.

Γ1.

Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ η f είναι συνεχής, ως τριγωνομετρική.

Στο $x_0=0$ έχω

$$\lim_{\chi\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{\chi\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +} \sigma\upsilon\nu x=1$$

$f(0)=\alpha\cdot 0^3-3\cdot 0^2-0+1=1$

Αρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

Για την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^-} \frac{x(ax^2-3x-1)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

Άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2. Η f συνεχής στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{3\pi}{2})$ με $f'(x)=(συνx)'=-ημx$

$f(0)=1$, $f(\frac{3\pi}{2})=συν\frac{3\pi}{2}=0$

Άρα δεν ισχύει μία από τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$.

ιι) Στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχω $f'(x)=0\Leftrightarrow -ημx=0\Leftrightarrow ημx=0\Leftrightarrow x=\pi$

Άρα το $ξ=\pi$ είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$

Γ3. Για $x\in(-\infty,0)$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x)=(αx^3-3x^2-x+1)'=3αx^2-6x-1$

Θα δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη.

$Δ=β^2-4αγ=(-6)^2-4\cdot α(-1)=36+12^{α}=12(3+α)<0$ αφού $α<-3$.

Άρα δεν υπάρχει σημείο $(x_0,f(x_0))$ με $x_0<0$ όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ.

Γ4. Για $x<0$ η $f'(x)=3αx^2-6x-1<0$ γιατί είναι τριώνυμο ομόσημο του α με $α<0$.

Στο $(0,\frac{3\pi}{2}]$ έχουμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow -ημx=0\Leftrightarrow x=\pi$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου

X	$-\infty$ 0 π $3\frac{\pi}{2}$		
f'(x)	-	-	+
f(x)	↘	↘	↗

Η f συνεχής άρα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-∞,0] ,[0,π] και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$.

Στο x_0=π παρουσιάζει ελάχιστο με ελάχιστη τιμή f(π)=συνπ=-1.

Αρα f(x)≥f(π)⇔f(x)≥-1 για κάθε x ∈ $(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = lnx - \frac{1}{x}, x\varepsilon(0, \infty)$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[1, e]$.

- $f(1) = ln1 - 1 = -1 < 0$
- $f(e) = lne - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$,

άρα $f(1) * f(e) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano,

η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\chi_o\varepsilon(1, e)$

Η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με $f'(x) = \left(lnx - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0,$ άρα f ως συνεχής είναι γν. αύξουσα στο (0,+∞).

Οπότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο (0,+∞) και επειδή έχει την χ_o που εξασφαλίσαμε, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Δ2.

Η $f(x) = (lnx_o) * (x+1) - lnx - 1 \, , x\varepsilon(0,+\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με

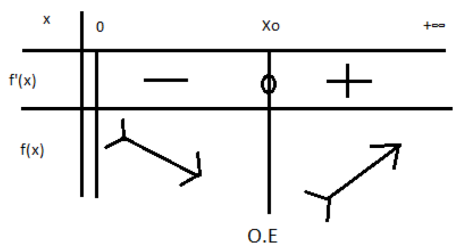
$$f'(x) = lnx_o * 1 - \frac{1}{x} = lnx_o - \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \iff lnx_o = \frac{1}{x} \iff x * lnx_o = 1 \iff x = \frac{1}{lnx_o} = \frac{1}{\frac{1}{x_o}} = x_o$$

Για το πρόσημο της f'(x) έχουμε

$$f'(x) > 0 \iff lnx_o - \frac{1}{x} > 0 \iff lnx_o > \frac{1}{x} \overset{x>0}{\iff} lnx_o * x > 1 \overset{lnx_o=\frac{1}{x_o}}{\iff} \frac{1}{x_o} * x > 1 \overset{x_o>0}{\iff} x > x_o$$

Ανάλογα $f'(x) < 0 \iff x < x_o$



Στο $(0,+\infty)$ *η f γνήσια φθίνουσα και στο* $[\chi_o,+\infty]$ *η f γνήσια αύξουσα. Άρα στο* χ_o *παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το*

$$f(x_o) = (lnx_o) * (x_o + 1) - lnx_o - 1 =$$
$$= x_o * lnx_o + lnx_o - lnx_o - 1 =$$
$$= x_o * \frac{1}{x_o} - 1 = 0$$

Δ3.

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \frac{x}{e^x}=\frac{(x_0)^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow e^{x+1}x=e^x(x_0)^{x+1}\Leftrightarrow ex=(x_0)^{x+1}$$

(2)

Αν $x\le 0$ η (2) είναι αδύνατη οπότε η **(2)** ορίζεται στο $(0,+\infty)$

.

Επομένως :

$$\ln(ex)=\ln(x_0)^{x+1}\Leftrightarrow \ln x+1=(x+1)\ln x_0\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

Άρα $\boxed{g(x_0)=h(x_0)}$

Η $g(x)=xe^{-x}$ παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

Η $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$$g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=x_0e^{-x_0}(\ln x_0-1)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα $\boxed{g'(x_0)=h'(x_0)}$

Επειδή $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ οι C_g,C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0

Δ4. Η απόσταση των σημείων $A(x,f(x)),B(x,\varphi(x))$ για $x>0$ είναι

$$AB = \sqrt{(x-x)^2 + \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2} = |f(x) - \varphi(x)|$$
$$= f(x) - \varphi(x)$$

Αλλιώς επειδή τα Α, Β έχουν την ίδια τετμημένη η απόσταση ΑΒ είναι η κατακόρυφη απόστασή τους οπότε $(AB) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$

Έστω η συνάρτηση $t(x) = f(x) - \varphi(x), x > 0$.

Η t είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την παραγωγισιμότητα της φ στο x_0.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στοx_0 επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα παράγωγος αθροίσματος η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $t'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = -\varphi'(x_0)$.

Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ οπότε η t παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, οπότε από Θεώρημα Fermat $t(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$ άρα το x_0 κρίσιμο σημείο της.

Έτσι το x_0 σε κάθε περίπτωση είναι κρίσιμο σημείο της φ.