ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ 135

Α2. α. Ψευδής (ορθή εκφώνηση σελ 99)

β. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου σελ 99

Α3 Σελίδα 73

Α4 α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τη σύνθεση της g με την f βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της

$$A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\right\}$$

Δηλαδή : $x\neq 1$ και $\dfrac{x}{1-x}>0\Leftrightarrow 0<x<1$

Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ με πεδίο ορισμού $A_{f\circ g}=(0,1)$ και τύπο

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=\ln\frac{x}{1-x}$$

Β2. Για τη συνάρτηση $h(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $A_h=(0,1)$ έχουμε

$h(x)=\ln x-\ln(1-x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A_h=(0,1)$ με παράγωγο

$h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h .

Η h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_h=(0,1)$ επομένως το σύνολο τιμών της είναι : $h(A_h)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ διότι :

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=(-\infty)-0=-\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}h(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\ln x-\ln(1-x)\right)=0-(-\infty)=+\infty$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι $A_{h^{-1}}=(-\infty,+\infty)$ και ο τύπος της :

$$h(x)=y\Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x}=y\Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y-xe^y$$

$$\Leftrightarrow x+xe^y=e^y\Leftrightarrow x\left(1+e^y\right)=e^y\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y},\, y\in(-\infty,+\infty)$$

Επομένως $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\, x\in(-\infty,+\infty)$

Β3. Η φ παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με

$\varphi'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$ επομένως η φ γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και δεν παρουσιάζει ακρότατα .

Για τα διαστήματα κυρτότητας θα βρούμε τη δεύτερη παράγωγο της φ

$$\varphi''(x)=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left((e^x+1)^2\right)'}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x2(e^x+1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

Για τις ρίζες και το πρόσημο της φ'' έχουμε τα παρακάτω :

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$$
$$\varphi''(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0 \Leftrightarrow x<0$$

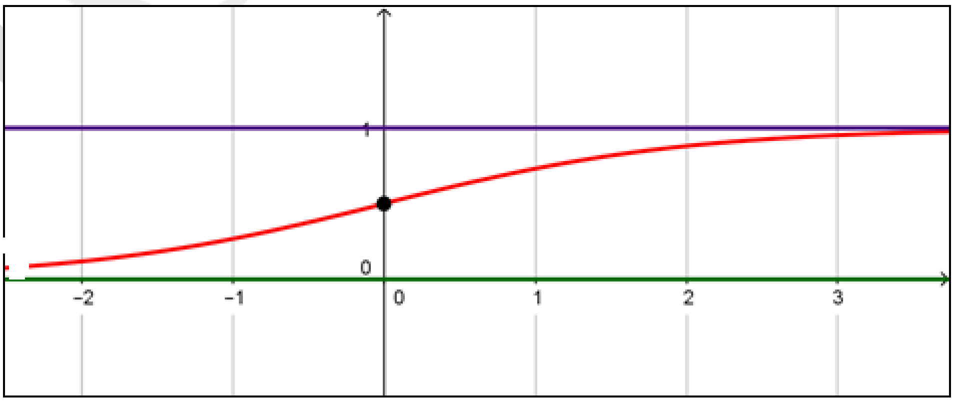
Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η φ είναι κυρτή ενώ στο διάστημα $[0,+\infty)$ η φ είναι κοίλη. Το σημείο $(0,\varphi(0))$ δηλαδή το $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι το σημείο καμπής .

Β4. Για τις οριζόντιες ασύμπτωτες της φ έχουμε :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f η εξίσωση της εφαπτομένης της στο Μ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Για να υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτόμενες που άγονται από το Α θα πρέπει το σημείο Α να ανήκει στην (ε) άρα: $-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$
και η τελευταία εξίσωση να έχει δύο ακριβώς ρίζες .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ με $x \in [0, \pi]$
Η g παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $g'(x) = \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ διότι $\eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}$ διότι $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	↘	↗

Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι γνησίως αύξουσα

Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0, \pi]$ τις $x = 0$ και $x = \pi$ οι όποιές εμφανίζονται στα άκρα του πεδίου ορισμού .

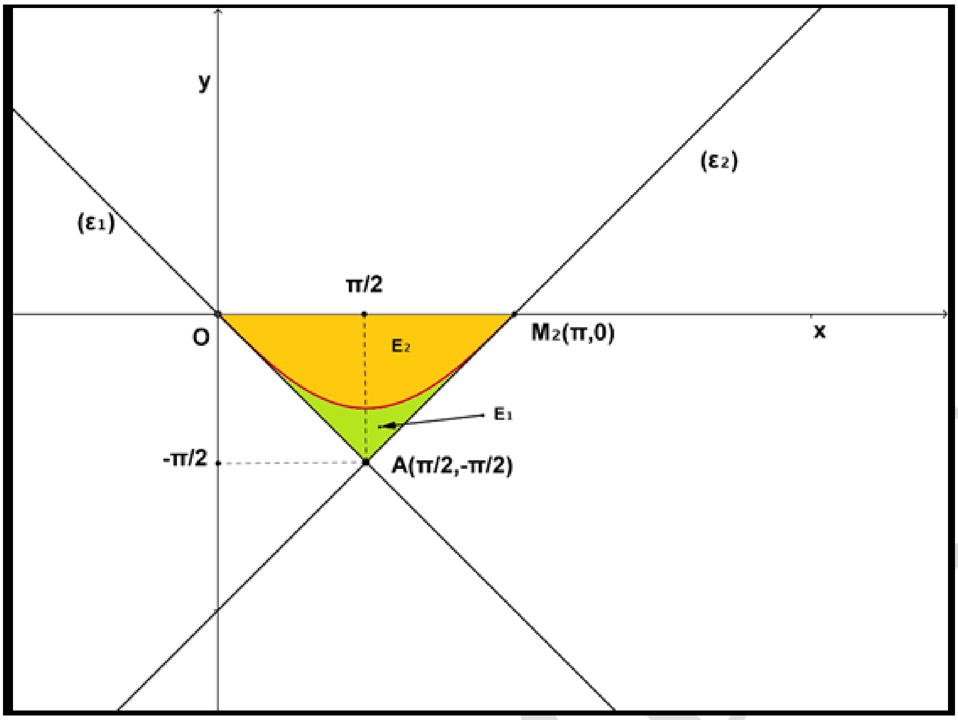
Οι εφαπτόμενες της f στα σημεία $(0, f(0))$ και $(\pi, f(\pi))$ είναι αντίστοιχα

$$(\varepsilon_1): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

$$(\varepsilon_2): y - f(\pi) = f'(\pi)\cdot(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$$

Γ2. Βρίσκουμε το εμβαδόν του τριγώνου OAB

οπου $O(0,0)$ $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ και $B(0,\pi)$.



$$E_{OAB}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=2$$

$$E_1=E_{OAB}-E_2\Leftrightarrow E_1=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Άρα $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$

Γ3. Για το ζητούμενο όριο έχουμε :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\left[(f(x)+x)\frac{1}{f(x)-(x-\pi)}\right]$$

Η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης της βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής

Δηλαδή ισχύει :

$$f(x)\geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\geq 0 \text{ και το ίσον ισχύει μόνο για } x=\pi$$

Άρα για $x\to\pi$ ισχύει $f(x)-x+\pi>0$

και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)-x-\pi\right)=0$ άρα : $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-(x-\pi)}=+\infty$

Γ4. Από το **Γ3** έχουμε :

$$f(x)>x-\pi \text{ για κάθε } x\in[1,e] \text{ άρα :}$$

$$\frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\left[x-\pi\ln x\right]_1^e$$

$$\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως ρίζα συνεχούς.
Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών.
Για την συνέχεια στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(e^x\eta\mu x\right)=0,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για $x\in[-1,0)$ έχουμε : $f'(x)=\left(\left(x^4\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}\left(x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot4x^3\neq0$

Για $x\in(0,\pi]$ $f'(x)=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

άρα το σημείο $x=\dfrac{3\pi}{4}$ είναι κρίσιμο.

Για το σημείο 0 έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|\cdot\sqrt[3]{|x|}}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x ημx}{x}=1$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f .

Δ2. Για $x\in(0,\pi)$: $f'(x)=e^x\cdot(ημx+συνx)$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow ημx>-συνx\Leftrightarrow σφx>-1\Leftrightarrow σφx>σφ\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x<\frac{3\pi}{4}$$

άρα η μονοτονία της f είναι:

f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

και παρουσιάζει τοπικά ακρότατα τα

$$f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(\pi)=0$$

και το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ προφανώς είναι $e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>1$

Δ3. Βρίσκουμε τα κοινά τους σημεία λύνοντας την εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow e^x ημx=e^{5x}\Leftrightarrow ημx=e^{4x}$$

η οποία προφανώς είναι αδύνατη γιατί x>0.

Διότι : κάθε $x>0\Leftrightarrow e^x>1$ και για κάθε $x>0$ $-1\le ημx\le 1$

Το εμβαδόν του χωρίου είναι $E=\int_0^{\pi}\left|e^x ημx-e^{5x}\right|dx$ τώρα βρίσκουμε το πρόσημο της $e^x\left(ημx-e^{4x}\right)$ το οποίο είναι προφανώς αρνητικό για κάθε $x>0$

$$I_1=\int_0^{\pi}e^x ημx dx=\left[e^x ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x συνx dx=$$

$$=0-\left(\left[e^x συνx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(-ημx)dx\right)=-\left[e^x συνx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x ημx dx$$

άρα $2I_1 = e^{\pi} + 1 \Rightarrow I_1 = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{5x}dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi}-1}{5}$$

άρα

$$E = -I_1 + I_2 = \frac{e^{\pi}+1}{2} + \frac{e^{5\pi}-1}{5}$$

Δ4. Η εξίσωση γίνεται

$$e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(16f(x) - 16\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\right) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(f(x) - \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\right) = e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$$

από το ολικό μέγιστο της f το πρώτο μέλος είναι μικρότερο ίσο από το μηδέν ενώ το δεύτερο μέλος μεγαλύτερο ίσο από το μηδέν κατά συνέπεια η εξίσωση έχει μόνο μία ρίζα το $\dfrac{3\pi}{4}$